

天体測定学 II 2007-3

1 輻射輸送方程式

輝度 I_ν が物質中を伝播する際にどのように変化するかを表す基礎方程式が輻射輸送方程式である。

輝度 I_ν 、経路に沿った長さを s とすると、吸収・放射を行う物質がない場合 (e.g. 真空中) すでに見たように輝度は保存量であるから

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0. \quad (1)$$

一方、伝播経路上に物質 (例えばガス雲) が存在すると輝度 I_ν は物質による吸収、放射の影響を受けて変化する。今、

吸収係数を κ_ν (単位例 1 / m)

放射係数を j_ν (単位例 W / m³ Hz str)

としたとき I_ν の変化は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu, \quad (2)$$

とかける。これが輻射輸送の基本方程式である。右辺第 1 項は吸収係数 κ_ν および輝度 I_ν に比例する吸収量であり、第 2 項は放射量を表し、 I_ν にはよらない。

さらに、伝播経路に沿った光学的厚み τ_ν を以下で定義する。

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds. \quad (3)$$

$d\tau_\nu = \kappa_\nu ds$ を用いて、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (4)$$

さらに

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (5)$$

を導入して

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \quad (6)$$

と書くことができる。 S_ν を源泉関数という。

S_ν が場所によらず一定とすると、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{d}{d\tau_\nu}(I_\nu - S_\nu) = -I_\nu + S_\nu, \quad (7)$$

より、微分方程式を積分できて、

$$(I_\nu - S_\nu) = C e^{-\tau_\nu}. \quad (8)$$

初期条件 $I_\nu(\tau_\nu = 0) = I_\nu(0)$ より

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (9)$$

これが輻送方程式の解である。

この式のいくつかの重要な特徴として以下があげられる。

- $\tau_\nu = 0$ (物質なし): $I_\nu = I_\nu(0)$: 初期情報が保存
- $\tau_\nu \ll 1$ (optically thin): $I_\nu = I_\nu(0) + \tau_\nu S_\nu$
- $\tau_\nu \gg 1$ (optically thick): $I_\nu = S_\nu$

optically thin の場合、 $\tau_\nu S_\nu$ の項から物質 (ガス雲) の情報を得ることができる。一方、optically thick の場合、初期情報 $I_\nu(0)$ は完全に失われ、ガス雲の表面のみの情報が得られる。

2 黒体輻射

2.1 黒体輻射の輝度

黒体の定義は「すべての周波数の放射を吸収、放射する理想的な物体」であり、すべての周波数にわたって $\tau_\nu = \infty$ である。黒体の表面から放射される輝度 $B_\nu(T)$ は、プランクの放射公式より温度 T のみの関数になり、以下で書ける。

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (10)$$

単位時間、単位面積、単位立体角、単位周波数あたり放射されるエネルギー dE は

$$dE = B_\nu dS d\Omega d\nu dt \quad (11)$$

MKSA 単位系では、輝度 B_ν の単位は $\text{W} / \text{m}^2 \text{ Hz str}$ である。黒体輻射の具体的な例に、電熱線からの放射、高温の溶鉱炉からもれる光、太陽の光球、宇宙背景放射など、日常生活から宇宙まで多様な例がある (黒体輻射の研究は溶鉱炉の温度を放射から決定するために始まった)。

B_ν に現れる定数について、以下にまとめる。

- プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- ボルツマン定数 $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J / K}$
- 光速 $c = 299792458 \text{ m / s}$ (真空中、定義値)

いずれも物理学の様々な場面に現れる重要な定数である。

2.2 輝度とプランクの放射公式

黒体放射を議論する際に量子力学の教科書などで必ず登場するのがプランクの放射公式である。最も良く使われるプランクの放射公式は、黒体炉内で単位体積、単位周波数あたりの放射強度 u_ν を表し、

$$u_\lambda = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (12)$$

であろう。単位体積内に含まれる光子の運動方向は完全にランダムであるので、特定の単位立体角 $d\Omega$ 内に進む光子は全体の $1/4\pi$ であり、その速度は光速 c であることから、 B_ν は u_ν を用いて、

$$B_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu, \quad (13)$$

と書ける。

2.3 2つの近似式

黒体の輝度 B_ν の近似式として以下の2つの重要な近似がある。

1) レーリー・ジーンズ近似 ($h\nu \ll kT$ 、低周波領域)

$$B_\nu(T) = \frac{2kT}{c^2} \nu^2 \propto \nu^2 \quad (14)$$

2) ウィーン近似 ($h\nu \gg kT$ 、高周波領域)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)} \propto \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)}. \quad (15)$$

2.4 放射の極大値

黒体放射輝度が極大となる周波数 ν の値は、 $\partial B_\nu / \partial \nu = 0$ より求めることができる。ここで、 $x \equiv h\nu/kT$ とすると

$$B(x) = C \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad (16)$$

となり、周波数 ν で微分すると、

$$\frac{\partial B_\nu(x)}{\partial x} = C \left[\frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \right] = \frac{Cx^2}{(e^x - 1)^2} [3(e^x - 1) - xe^x],$$

を得る。 $\partial B_\nu / \partial x = 0$ となるためには、

$$3(e^x - 1) - xe^x = 0$$

であればよいから、最終的に

$$x = 3(1 - e^{-x}) \quad (17)$$

数値計算によれば上式は $x \approx 2.82$ で満たされるので、最終的に B_ν の極大値は

$$\nu_{\max} = 2.82 \frac{kT}{h}, \quad (18)$$

となる。

具体的な数値を代入すると。

$$\nu_{\max} = 59 \times \left(\frac{T}{\text{K}} \right) \text{ GHz}. \quad (19)$$

例えば、宇宙背景放射 (2.7 K) の場合、 $\nu \approx 160$ GHz となり、ミリ波帯でピークとなる。

上記の関係式はヴィーンの変位則の周波数版である。元々の変位則は

$$\lambda_{\max} = 2.9 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{K}}{T} \right) \text{ m}, \quad (20)$$

であり、この関係式は B_λ を λ で微分することで得ることができる。

2.5 黒体からの電波放射

電波帯で見た黒体放射は、ほぼすべての場合についてレーリー・ジーンズ近似が成立する。レーリー・ジーンズ領域では黒体の輝度は周波数の2乗 ν^2 に比例するので、どのような温度の天体もそれなりの強度の電波を出す (c.f. ウィーン領域では周波数とともに指数関数的に強度が落ちる)。それゆえ、電波では宇宙背景放射から高温プラズマまで様々な温度の天体を観測することができるのである。光や X 線などの波長の短い電磁波では、逆に、ある一定以上の温度をもった天体のみが選択的に見えている。

3 輝度温度

黒体放射の式 B_ν は、黒体の輝度を表す式である。レーリー・ジーンズ近似

$$B_\nu(T) = \frac{2k\nu^2}{c^2} T \propto T, \quad (21)$$

より、黒体の輝度は黒体温度 T に比例する。この関係を用いて、一般の天体の輝度 I_ν が (実際に黒体かどうかに関わらず) 「何度の黒体に相当するか」として表したものが輝度温度 (Brightness temperature) である。すなわち輝度温度 T_b は以下で定義される。

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b, \quad (22)$$

あるいは

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu, \quad (23)$$

輝度温度は電波観測において大変重要な観測量である。輝度温度は、熱的放射の場合天体の温度を反映し、特に天体が黒体放射をしている場合には、輝度温度 T_b は天体の温度 T に一致する。