天体測定学 II 2007-4

1 局所熱平衡状態の媒質中での輻射輸送の式

1.1 キルヒホッフの法則

すでにのべたように、一様な媒質（源泉関数が一定）の場合、輻射輸送方程式の解は、以下で得られる。

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \tag{1}$$

$\tau_\nu = \infty$ の極限では、I_ν は黒体輻射 B_ν にならなければいけないので、熱平衡状態にある源泉関数 S_ν もまた黒体輻射 B_ν に等しい。源泉関数の定義は

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{k_\nu}, \tag{2}$$

であるから、最終的に

$$\frac{j_\nu}{k_\nu} = B_\nu, \tag{3}$$

である。これをキルヒホッフの法則という。キルヒホッフの法則は物質の放射係数と吸収係数を結びつける重要な関係式である。

1.2 輝度温度を用いた輻射輸送の式

局所熱平衡状態にある物質中を伝播した際に輻射輸送方程式は

$$I_\nu = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}), \tag{4}$$

である。これを輝度温度と B_ν のレーリー・ジーンズ近似を用いると、

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), \tag{5}$$

という形でかけ、輝度温度に関する式が得られる。ここで T は熱平衡状態にある物質の温度である。

2 太陽と地球の温度

2.1 太陽からのフラックスと太陽光度

地球が太陽から受け取るフラックス F_ν は、輝度 B_ν を用いて

$$F_\nu = \int B_\nu \cos\theta \, d\Omega \approx B_\nu \Omega_\odot \tag{6}$$

とかける。ここで $\Omega_{\odot}$ は地球から太陽を見込む立体角であり、具体的には地球を中心とする半径１天文単位 (a) の球の面積に対する太陽の断面積の比として得られるから、

$$\Omega_{\odot} = 4\pi \frac{\pi r_{\odot}^2}{4\pi a^2}. \tag{7}$$

これらの関係を用いると、

$$F_\nu = \left(\frac{r_{\odot}}{a^2}\right) \pi B_\nu, \tag{8}$$

となる。また、全周波数にわたって積分した総フラックス F は、

$$F = \left(\frac{r_{\odot}}{a^2}\right) \pi \int B_\nu d\nu \tag{9}$$

である。F は地球の位置から太陽を見たときに単位面積を単位時間あたりに通過するエネルギーである。太陽の光度 $L_{\odot}$ は、これを全方向で積分したものであるから、これに a を半径とする球の表面積 $4\pi a^2$ をかけて

$$L_{\odot} = 4\pi a^2 \times F = 4\pi r_{\odot}^2 \times \pi \int B_\nu d\nu, \tag{10}$$

となる。ここで、太陽の表面積は $S_{\odot} = 4\pi r_{\odot}^2$ であることから、$\pi \int B_\nu d\nu$ は単位面積、単位時間あたりの放射エネルギー l を表している。すなわち、これらを用いると、

$$L_{\odot} = S_{\odot} \times l \tag{11}$$

$$F = \left(\frac{r_{\odot}^2}{a^2}\right) \times l \tag{12}$$

$$S_{\odot} = 4\pi r_{\odot}^2 \tag{13}$$

$$l = \pi \int B_\nu d\nu \tag{14}$$

2.2 シュテファン・ボルツマンの法則

黒体の単位面積、単位時間あたりの放射エネルギー l を求める。黒体の輝度 B_ν は、

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \tag{15}$$

であり、

$$x \equiv \frac{h\nu}{kT}, \tag{16}$$

を用いると、

$$\int B_\nu \, d\nu = \int \frac{2hx^3}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{1}{e^x - 1} \frac{kT}{h} \, dx,$$

$$= \frac{2k^4T^4}{c^2h^3} \int \frac{x^3}{e^x - 1} \, dx,$$

となり、さらに

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

を用いると、結果的に

$$\int B_\nu\,d\nu = \frac{2\pi^4 k^4 T^4}{15c^2h^3}, \tag{17}$$

となる。よって黒体の単位面積あたりの放射エネルギー l は、

$$l = \pi \int B_\nu\,d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} T^4 \equiv \sigma T^4, \tag{18}$$

ここで σ はシュテファン・ボルツマン定数

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4} \tag{19}$$

である。すなわち、黒体からの全放射エネルギーは温度 T の４乗に比例することがわかる。この関係式をシュテファン・ボルツマンの法則という。

2.3　例１：太陽の放射エネルギー

太陽の光度 $L_\odot$（単位時間あたりのエネルギー放射量）はシュテファン・ボルツマンの法則から簡単に見積もることができる。

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 l = 4\pi R_\odot^2 \sigma T^4, \tag{20}$$

ここで太陽半径 $R_\odot$ は 70 万 km $= 7 \times 10^8$ m、表面温度 T は約 5800 K であるから、これらの値を代入すると

$$L_\odot \sim 3.9 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$$

を得る。日本の最新鋭の原子力発電所の最大出力が 100 万 kW=10^9 W であるから、太陽エネルギーが桁違いに大きいことがわかる。

2.4　例２：地球の温度

地球が太陽から単位時間あたり受け取るエネルギー量 $P_{\oplus,\mathrm{rec}}$ は、総フラックス F に地球の断面積をかけて得られる。すなわち、

$$P_{\oplus,\mathrm{rec}} = F \times \pi r_\oplus^2 \times (1 - A), \tag{21}$$

ここで A は地球の反射率（アルベドと呼ばれる）を表し、最後の $(1 - A)$ の項は反射されずに地球表面に吸収されるエネルギーの割合を表している。人工衛星からみた地球が明るく輝いているのは A が 0 でなく、太陽光を反射し

ているからである（$A \sim 0.3$ 程度である）。この式に式 (12) を代入して整理すると、

$$P_{\oplus,\mathrm{rec}} = \left(\frac{r_\odot^2}{a^2}\right)\sigma T_\odot^4 \times \pi r_\oplus^2 \times (1-A) \tag{22}$$

一方、地球表面の温度を $T_\oplus$ としするとき、地球表面から放射される単位時間あたりのエネルギー $P_{\oplus,\mathrm{rad}}$ は

$$P_{\oplus,\mathrm{rad}} = 4\pi r_\oplus^4 \sigma T_\oplus^4. \tag{23}$$

受け取るエネルギーと放射するエネルギーがつりあっているとする ($P_{\oplus,\mathrm{rec}} = P_{\oplus,\mathrm{rad}}$) と、

$$\frac{P_{\oplus,\mathrm{rec}}}{P_{\oplus,\mathrm{rad}}} = \frac{(r_\odot^2/a^2)\sigma T_\odot^4 \times \pi r_\oplus^2 \times (1-A)}{4\pi r_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4} = 1, \tag{24}$$

これを整理すると、

$$\frac{r_\odot^2 T_\odot^4 (1-A)}{4a^2 T_\oplus^4} = 1,$$

より

$$T_\oplus = (1-A)^{1/4}\sqrt{\frac{r_\odot}{2a}}\,T_\odot, \tag{25}$$

となり、地球の表面温度は、太陽温度 $T_\odot$、太陽半径 $r_\odot$、太陽地球距離 a、および反射率 A で決まることがわかる（地球の半径 $r_\oplus$ にはよらない）。この式に具体的な値を代入すると、

$A = 0$ の場合、$T_\oplus = 279$ K （摂氏 6 度）

$A = 0.3$ の場合、$T_\oplus = 255$ K （摂氏 -18 度）

となり、地球の表面温度にほぼ対応していることがわかる。

3　輝線観測の基礎

3.1　特殊相対論的なドップラー効果

天体が観測者に対して速度 v（遠ざかる方向を正とする）で等速直線運動しているとしたときに、特殊相対論的なドップラー効果による周波数変化は次の式で書ける。

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\theta}\,\nu_0. \tag{26}$$

ここで、ν_0 は静止系で観測される周波数であり、ν は観測される周波数である。式 (26) のうち、分母は天体の視線方向の運動によって波長が引き伸ばされる効果を表す。

仮に天体が観測者に対して静止していた時に、天体から観測者へ伝播する波長 λ の電磁波を考える。天体と観測者間の距離 d としたときに、時間間隔 $t = d/c$ の間に $n = d/\lambda$ 個の波が放出される。一方、天体が観測者に対して速度 v で運動している場合、天体と観測者間の距離は時間間隔 t の後には

$$d' = d + (v\cos\theta)t \tag{27}$$

に広がり、また、波の数 n が不変であることから、

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{d + (v\cos\theta)t}{d} = 1 + \frac{v}{c}\cos\theta, \tag{28}$$

これを $c = \lambda\nu$ を用いて周波数に関する式に書き直すと、

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + (v/c)\cos\theta}. \tag{29}$$

また、ドップラー効果の式 (26) の分子は特殊相対論的な時間の遅れの効果を表す。すなわち、観測者から見ると、運動している天体の時計の進み方は $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍になり、周波数もこれに比例して小さくなる。すなわち、

$$\frac{\nu''}{\nu} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{30}$$

この効果は天体の運動速度の大きさのみによるので、天体が視線に直交する方向に運動している場合（$\theta = \pi/2$）でも周波数が変化する（横ドップラー効果)。これら 2 つの効果により、最終的に特殊相対論的なドップラー効果は式 (26) で書ける。

もし、天体が視線方向にのみ運動しているとすると ($\theta = 0$)、式 (26) は、

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}\,\nu_0 = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\,\nu_0, \tag{31}$$

となる。あるいは、波長についての式は、

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\,\lambda_0, \tag{32}$$

3.2　速度が小さいときの近似式

$v/c << 1$ の時の近似式を考える。式 (31) の両辺を 2 乗して

$$(1+\frac{v}{c})\nu^2 = (1-\frac{v}{c})\nu_0^2$$

これを v/c について解くと、

$$\frac{v}{c} = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\nu_0^2 + \nu^2}$$

ここで、ドップラーシフトによる周波数変化量 $\Delta\nu$ を

$$\Delta\nu \equiv \nu - \nu_0, \tag{33}$$

で導入すると、

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &= \frac{\nu_0^2 - (\nu_0 + \Delta\nu)^2}{\nu_0^2 + (\nu_0 + \Delta\nu)^2} \\ &= \frac{-2\Delta\nu\nu_0 - \Delta\nu^2}{2\nu_0^2 + 2\Delta\nu\nu_0 + \Delta\nu^2} \\ &= \frac{-\Delta\nu/\nu_0 - \Delta\nu^2/2\nu_0^2}{1 + \Delta\nu/\nu_0 + \Delta\nu^2/2\nu_0^2} \\ &\approx \left(-\frac{\Delta\nu}{\nu_0} - \frac{\Delta\nu^2}{2\nu_0^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)\end{aligned}$$

より最終的に、

$$\frac{v}{c} \approx -\frac{\Delta\nu}{\nu_0} + \frac{\Delta\nu^2}{2\nu_0^2}, \tag{34}$$

を得る。

3.3　視線速度の電波天文的な定義、光学天文的な定義

さらに、一次の近似で十分な場合、式 (34) はより簡略化できて

$$\frac{v}{c} = -\frac{\Delta\nu}{\nu_0}, \tag{35}$$

である。通常、電波天文学における視線速度 $v_{\rm rad}$ は、式 (35) を使って定義される。

一方、波長と視線速度の関係式 (32) を用いて、上と動揺に v/c について求めると、

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda^2}{2\lambda_0^2}, \tag{36}$$

となり、一次近似では、

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \tag{37}$$

となる。光学天文学での視線速度はこの式を用いて定義されることが多い。

注意すべきこととして、式 (35) と式 (37) を用いて定義される視線速度は一次近似であるので、2 次以上の項を考慮すると一致しない。このような混乱を避けるには（特に宇宙論的な遠方天体を観測する際の波長や周波数を求める場合)、以下で定義される赤方偏位 z を使うのが良い。

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (1 + z) \tag{38}$$