天体測定学II 2007-5

1　輝線観測の基礎（続き）

1.1　熱運動による線幅

温度 T の熱平衡状態にあるガス中の粒子のエネルギー分布は以下で与えられる。

$$f(E) \propto \exp(-E/kT), \tag{1}$$

簡単のために粒子のエネルギーとして粒子の内部エネルギーは考えず運動エネルギーのみを考えるとする。個々の粒子の運動エネルギー E は、

$$E = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \tag{2}$$

と書け、ここで m は粒子の質量、v_x, v_y, v_z は 3 次元の運動速度成分を表す。よって、分布関数 $f(E)$ は

$$f(E) \propto \exp\left(-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right) \tag{3}$$

となる。一方、ガウス分布の式

$$f_{\rm gauss}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\Big], \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\rm gauss}(x)\,dx = 1 \tag{4}$$

を用いて分布関数を規格化すると、

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\Big[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\Big], \tag{5}$$

この分布はマクスウェル分布と呼ばれる。

電波望遠鏡で輝線を観測すると、熱運動によるドップラー効果により視線方向の運動速度が広がって観測される。このときの輝線の形状は、マウスウェル分布の x, y 方向を積分して（視線を z 方向に取る）、

$$\phi(v_z) = \iint f\,dv_x dv_y = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right), \tag{6}$$

というガウス分布でかける。このような輝線の形状を現す関数を、line profile function と呼ぶ。

あるいは、観測される周波数スペクトル上での拡がりは

$$\frac{v_z}{c} = -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}, \tag{7}$$

より、規格化した $\phi(\nu)$ は、

$$\phi(\nu) = \left(\frac{mc^2}{2\pi kT\nu_0^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}\right) \tag{8}$$

ここで、

$$\int \phi(\nu)\, d\nu = 1, \tag{9}$$

である。

1.1.1 半値幅

ガウス分布などにおいて、最大値の半値を与える分布幅を半値幅（FWHM: Full Width at Half Maximum）という。例えばガウス分布 f_{gauss} の場合、

$$f_{\mathrm{gauss}}(\mathrm{FWHM}/2) = 1/2 \tag{10}$$

より、

$$\mathrm{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2.35\sigma \tag{11}$$

と書ける。半値幅はスペクトルの線幅を表すのに最も良く使われる。

1.1.2 線幅の例

熱運動する気体粒子についてマクスウェル分布の分散 σ は、以下で与えられる。

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}} \tag{12}$$

以下にいくつかの例について、観測される線幅がどれくらいになるかを示す。

- T = 10 K の水素分子ガス： $\sigma = 0.21$ km/s, FWHM = 0.48 km/s
- T = 100 K の中性水素ガス： $\sigma = 0.91$ km/s, FWHM = 2.14 km/s
- T = 10^4 K の電離ガス： $\sigma = 9.1$ km/s, FWHM = 21.4 km/s

すなわち、熱運動による線幅は、典型的な星間空間では 1～数 10 km/s のオーダーである。なお、実際にはガス雲における内部構造の運動などで、完全なガウス分布からははずれた線幅が観測されることも多々ある。

1.2 アインシュタイン係数

準位 1,2($E_2 > E_1$ とする) の 2 準位からなる単純な原子モデルを考える。このとき 1,2 間でおこる放射には次の 3 種類がある。

- 吸収：状態 1 の原子／分子が光子を吸収して状態 2 へ遷移
- 自発的放射：状態 2 → 1 へ自然に遷移
- 誘導放射：外部から来た光子に誘発されて 2 → 1 へ遷移

輝度 I_ν の放射が、この２準位からなる物質に照射されたとき、上記の３種類の遷移が単位時間、単位体積あたりに起こる確率 R_1、R_2、R_3 はそれぞれ

$$R_1 \equiv B_{12} I_\nu n_1 \tag{13}$$

$$R_2 \equiv A_{21} n_2 \tag{14}$$

$$R_3 \equiv B_{21} I_\nu n_2 \tag{15}$$

と表すことができる。ここで、n_1, n_2 はそれぞれの状態にある粒子密度である。また、A_{21}, B_{12}, B_{21} はアインシュタイン係数と呼ばれ、それぞれの遷移確率を表す係数である。上の式から、各遷移確率はアインシュタイン係数およびその状態にある粒子密度 n_1, n_2 に比例することがわかる。

1.2.1 アインシュタインの関係式

各放射により放射された光子が持つエネルギーは $h\nu = E_2 - E_1$ であり、単位立体角あたりに放出されるエネルギーは $(h\nu/4\pi)$ である。ここで、輻射輸送方程式を考えると、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}\left[R_2 + R_3 - R_1\right]\phi(\nu) \tag{16}$$

ここで、$\phi(\nu)$ は線幅を表す関数であり、$\int \phi(\nu)\, d\nu = 1$ で規格化されているとする。上の式はアインシュタイン係数を用いて

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}\left[A_{21} n_2 + B_{21} I_\nu n_2 - B_{12} I_\nu n_1\right]\phi(\nu)$$

より

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}\left[-(B_{12} n_1 - B_{21} n_2) I_\nu + A_{21} n_2\right]\phi(\nu) \tag{17}$$

一方、吸収係数および放射係数を用いて書いた輻射輸送方程式は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu. \tag{18}$$

上の２つの式を比較から、吸収係数 κ_ν および放射係数 j_ν について以下の関係を得る。

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}(B_{12} n_1 - B_{21} n_2)\phi(\nu) \tag{19}$$

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{21} n_2 \phi(\nu) \tag{20}$$

源泉関数は $S_\nu = j_\nu \kappa_n$ で定義されるので、

$$S_\nu = \frac{A_{21} n_2}{B_{12} n_1 - B_{21} n_2} \tag{21}$$

ここで局所熱平衡状態を仮定すると、２つの準位の密度 n_1, n_2 について

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp(-\frac{h\nu}{kT}) \tag{22}$$

の関係がある。ここで g_1, g_2 は統計的重み（エネルギー準位の縮退度）を表す。

$$S_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12}g_1/g_2\exp(h\nu/kT) - B_{21}} \tag{23}$$

を得る。すでに見たように局所熱平衡状態の場合 $S_\nu = B_\nu$ であり、黒体輻射の輝度 b_ν は

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \tag{24}$$

であるから、$S_\nu = B_\nu$ を満たすためには、以下の２つの関係が要求される。

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2}B_{21} \tag{25}$$

$$g_1B_{12} = g_2B_{21} \tag{26}$$

これらの２つの式はアインシュタインの関係式と呼ばれる。この式は熱平衡状態に基づいて導出したが、アインシュタインの会形式は温度 T によらず、熱平衡状態でなくとも成り立つ一般的な式である。アインシュタインの関係式を用いると、A_{21}、B_{21}、B_{12} のうち１つが得られれば他の２つも決めることができる。

1.2.2 吸収係数と光学的厚み

吸収係数 κ_ν をアインシュタイン係数を用いて書き改めてみる。

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}(B_{12}n_1 - B_{21}n_2)\phi(\nu') \tag{27}$$

に、アインシュタインの関係式を代入して B_{12}, B_{21} を消去する。

$$\begin{aligned}\kappa_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi}(\frac{B_{12}}{B_{21}}n_1 - n_2)B_{21}\phi(\nu') \\ &= \frac{h\nu}{4\pi}(\frac{g_2}{g_1}n_1 - n_2)\frac{c^2}{2h\nu^3}A_{21}\phi(\nu') \\ &= \frac{c^2}{8\pi\nu^2}\frac{g_2}{g_1}n_1(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{n_2}{n_1})A_{21}\phi(\nu')\end{aligned}$$

よって、

$$\kappa_\nu = \frac{c^2g_2n_1}{8\pi\nu^2g_1}\left[1 - \exp(\frac{h\nu}{kT})\right]A_{21}\phi(\nu') \tag{28}$$

さらにレーリー・ジーンズ近似 $(h\nu << kT)$ の場合、

$$\kappa_\nu = \frac{c^2hg_2n_1}{8\pi\nu g_1k}\frac{A_{21}}{T}\phi(\nu') \tag{29}$$

を得る。このとき光学的厚み τ_ν は

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu \, ds \tag{30}$$

より、

$$\tau_\nu = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k}\frac{A_{21}}{T}\phi(\nu')\int n_1 \, ds \equiv \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k}\frac{A_{21}}{T}\phi(\nu')N_1 \tag{31}$$

ここで

$$N_1 = \int n_1 \, ds \tag{32}$$

は原子の柱密度を表す。すなわち、光学的厚み τ_ν は視線方向に積分した柱密度に比例する。また、物質の温度 T に反比例している。従って、光学的厚みが得られ、さらに物質温度 T が判れば、物質の存在量を求めることが可能である。

1.2.3 光学的厚みが小さい場合

光学的厚みが小さい場合、輝度温度で表した輻射方程式は

$$T_b = T_b(0) + \tau_\nu T \tag{33}$$

である。ここで T は物質の温度を表している。これに式 (31) を代入し、背景放射に対する温度増分 $\Delta T_b \equiv T_b - T_b(0)$ を導入すると、

$$\Delta T_b = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} A_{21} N_1 \phi(\nu') \tag{34}$$

となり、T が消去されていることがわかる。従って、τ_ν が小さい場合、観測された輝度は物質の温度によらずに直接に柱密度に変換することが可能である。線幅を表す関数 $\phi\nu'$ を消去するために ν' で両辺を積分すると、

$$\int \Delta T_b \, d\nu' = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} A_{21} N_1 \tag{35}$$

である ($\int \phi(\nu')\, d\nu' = 1$)。さらに、ドップラーシフトの関係式

$$\frac{v}{c} = -\frac{\nu' - \nu}{\nu} \tag{36}$$

より、$d\nu' = -\nu/c \, dv$ であるから、

$$\frac{\nu}{c}\int \Delta T_b \, dv = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} A_{21} N_1$$

これを N_1 について解くと

$$N_1 = \frac{8\pi\nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \int \Delta T_b \, dv \tag{37}$$

この式が、光学的厚みが小さいときに、観測された輝度分布を物質の柱密度 N_1 に変換する式である。