

## 天体測定学 II 2008-10

### 1 電波干渉計の基礎方程式

干渉計の最も簡単な例として、2つの電波望遠鏡からなる2素子干渉計を考える。2つの観測局である電波天体を同時にしたとき、電波の伝播速度が有限(光速  $c$ )であるために、同一波面の電波が観測局1と2に到達する時刻に差が生じる。この到達時間差を遅延時間という。遅延時間は、アンテナや受信機内部での機械的遅延および大気や電離層による伝播遅延がない理想的な状態では、天体の方向ベクトル  $\vec{s}$  と基線ベクトル  $\vec{B}$  の幾何学的な関係のみから決まり、これを特に幾何学的遅延時間 ( $\tau_g$ ) と呼ぶ。図1からわかるように幾何学的遅延時間は、

$$\tau_g = \frac{\vec{s} \cdot \vec{B}}{c}, \quad (1)$$

という簡単な関係式で表される。これが干渉計の基本方程式であり、遅延時間は干渉計の最も基本的な観測量である。

式(1)において基線ベクトル  $\vec{B}$  が既知の場合、任意の星について  $\tau_g$  を計測してやると、その天体の方向ベクトル  $\vec{s}$  を決定することができる。もちろん、方向ベクトル  $\vec{s}$  はベクトル量であるので、1回の  $\tau_g$  の計測のみから  $\vec{s}$  を一意に決定することはできない。しかし、基線ベクトル  $\vec{B}$  は地球回転とともに時々刻々変化するので、時間とともに遅延時間  $\tau_g$  がどのように変化するかを観測すれば、式(1)に従って天体位置  $\vec{s}$  を決めることができる。また、同様に、天体位置  $\vec{s}$  が既知の場合は、遅延時間  $\tau_g$  の観測から基線ベクトル  $\vec{B}$  を求めることができる。このように、天体位置を求める位置天文観測と、基線長を求める測地観測とは、いわば表裏一体の関係にあることがわかる。

### 2 相互相関関数

干渉計で遅延時間を計測するには、複数の局で受信した信号を局同士で掛け合わせ、相互相関を取る必要がある。この処理をするのが相関器であり、干渉計観測に不可欠な装置である。例として、図1のような2素子干渉計において観測された電波の相互相関を以下で考える。

簡単のため天体は点源であるとし、天体からの電波は周波数  $\nu_0$  の単色平面波とする。この時、観測局1、2で受信される天体電波(電圧)はそれぞれ、

$$V_1(t) = V_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi), \quad (2)$$

$$V_2(t) = V_0 \cos(2\pi\nu_0(t - \tau_g) + \phi), \quad (3)$$

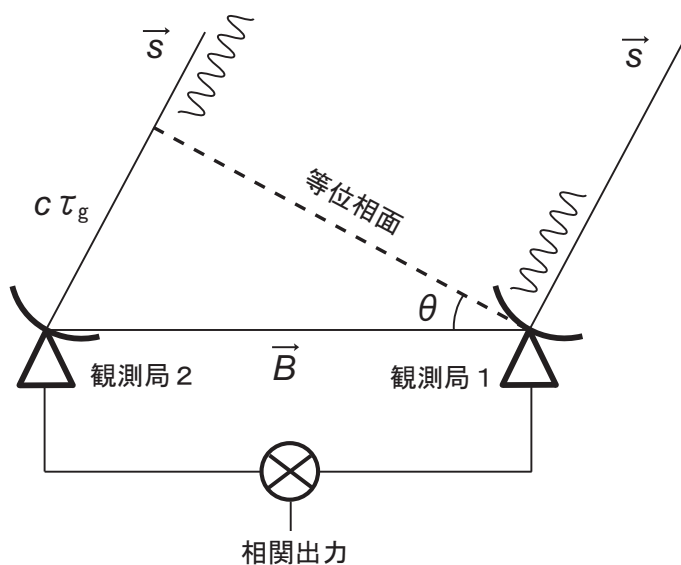


図 1: 2 素子干渉計における基線と幾何学的遅延時間の関係の模式図。

と書ける。ここで、 $\tau_g$  は幾何学的遅延時間である。このとき、相関器で得られる相互相関関数  $R_{12}(\tau)$  は次のように定義される。

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t) V_2(t - \tau) dt \quad (4)$$

相互相関関数は局 1 での受信電圧と局 2 での受信電圧を、時間を  $\tau$  だけずらしながら掛け合わせることを意味している。

式 (2)、(3) を式 (4) 代入して積分すると、 $t$  に関する振動成分は消えて、最終的に、

$$R_{12}(\tau) = \frac{V_0^2}{2} \cos 2\pi\nu_0(\tau + \tau_g), \quad (5)$$

という式が得られる。これが単色平面波に対する 2 素子干渉計の相関出力を表す式である。式 (5) からわかるように、相互相関の振幅は電波強度に依存し、位相は幾何学的遅延時間 ( $\tau_g$ ) に依存している。従って、干渉計の相関出力から天体の強度や位置の情報を取り出すことができる。他方、相互相関関数は波の初期位相  $\phi$  には依存しないことが式 (5) からわかる。

### 3 複素相互相関関数

電磁気学等においては正弦波的な振動関数を複素数で扱い、必要に応じて実部を取るやり方を導入すると計算上便利なことがあり、相互相関関数においても同様である。

今、各局で観測される複素電圧を

$$V_1(t) = V_0 e^{i(2\pi\nu_0 t + \phi)}, \quad (6)$$

$$V_2(t) = V_0 e^{i(2\pi\nu_0(t - \tau_g) + \phi)}, \quad (7)$$

とし、これを用いて複素相互相関関数を以下で定義すると、

$$C_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t) V_2^*(t - \tau) dt. \quad (8)$$

式 (6),(7),(8) より、

$$C_{12}(\tau) = V_0^2 e^{2\pi i \nu_0 (\tau + \tau_g)}, \quad (9)$$

を得る。このように複素数で記述された相互相関を複素相互相関関数と呼び、このような処理を行う相関器を複素相関器という。複素相互相関関数  $C_{12}$  においても振幅が天体強度の情報を、位相が遅延時間の情報を持っていることは実相関関数  $R_{12}$  の場合と代わらない。

## 4 パワースペクトル

相関関数をフーリエ変換したものをパワースペクトルという。パワースペクトルは、どの周波数でどの程度の電力を表すかを表す周波数領域の関数である。フーリエ変換および逆フーリエ変換は以下で定義される。

$$X(\nu) = \int x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (10)$$

$$x(t) = \int X(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (11)$$

ちなみに、フーリエ変換は物理的に同じ現象を時間領域の関数から周波数領域への関数へ（あるいはその逆へ）変換することを意味しており、相関関数とパワースペクトルも、物理的に同じ現象を時間領域・周波数領域で表した対である（特に、相互相関関数のフーリエ変換の場合、クロスパワースペクトルとも呼ばれる）。

### 4.1 単色波の場合

単色波の場合、複素相関関数  $C_{12}(\tau)$  をフーリエ変換すると。

$$S(\nu) = \int C_{12}(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau = V_0^2 \delta(\nu - \nu_0) e^{2\pi i \nu_0 \tau_g} \quad (12)$$

である。なお、ここで Dirac のデルタ関数 (Dirac's delta function) のフーリエ積分表示、

$$\delta(\nu) = \int e^{2\pi i \nu t} dt, \quad (13)$$

を用いた。式 (12) は、最初に仮定したとおり周波数  $\nu_0$  の輝線スペクトルになっており、その振幅は電圧の 2 乗なので電力に比例する。従って、相関関数のフーリエ変換が確かにパワースペクトルになっていることがわかる。

## 4.2 連続波源の場合

上記の議論では周波数  $\nu_0$  の単色波を考えたが、連続波スペクトルの場合、上の式を  $\nu_0$  について周波数方向に積分したものである。このときのパワースペクトルは

$$S(\nu) = F_\nu e^{2\pi i\nu\tau_g} \quad (14)$$

と表すことができる。 $F_\nu$  は周波数方向のフラックス分布を表す実関数で、連続波源の場合、通常は観測される帯域幅内でフラックスは一定と考えてよく  $F_\nu = \text{const.}$  である。このときパワースペクトルの位相  $\phi$  は周波数  $\nu$  の関数として連続的に変化し、

$$\phi = 2\pi\nu\tau_g, \quad (15)$$

である。

## 5 遅延追尾

相互相関を得るには式 (4) で時間積分をする間  $\tau_g$  が一定でなければならない。しかし、実際の干渉計では (特に基線長の大きい VLBI では) 地球回転の効果により  $\tau_g$  は時々刻々変化する。地球回転の角速度  $\omega_\oplus$  は

$$\omega_\oplus = \frac{2\pi}{86400 \text{ sec}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ radian/sec} \quad (16)$$

であり、基線長は例えば VERA の最長基線の  $|\vec{B}| = 2300 \text{ km}$  とすると、基線長の変化率  $\dot{\vec{B}}$  は

$$\dot{\vec{B}} \approx |\vec{B}|\omega_\oplus = 167 \text{ m/sec} \quad (17)$$

となる。すなわち 1 秒間に幾何学的遅延時間は 100 m 以上変化する。一方、

$$\phi = 2\pi\nu\tau_g = 2\pi \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{\lambda} \quad (18)$$

より、パワースペクトルの位相の変化率を回転数で表した値

$$\frac{\dot{\phi}}{2\pi} = \frac{\dot{\vec{B}} \cdot \vec{s}}{\lambda} \quad (19)$$

は、例えば VERA で 22GHz 帯の観測の場合  $\lambda = 1.3 \text{ cm}$  より、

$$\frac{\dot{\phi}}{2\pi} \approx \frac{|\dot{\vec{B}}|\omega_\oplus}{\lambda} = 1.2 \times 10^4 \text{ Hz} \quad (20)$$

となる。すなわち、今考えている例では相関関数を計算するために仮に1秒間積分したとすると、その間に  $\tau_g$  の変化によって位相が1万2000回も余計に回転する。これでは正しく積分することが不可能であり(例えば、振幅1でぐるぐると回転する複素ベクトルをそのまま時間平均すると0になる)。このため相関関数を得るには位相回転を止めるために幾何学的遅延時間  $\tau_g$  を打ち消すような補正項  $-\tau_0$  を加える必要がある。これは、あらかじめ判っている天体の位置を基に幾何学的遅延時間を予想したものであり、この補正を遅延追尾といい、 $\tau_0$  の計算に使われる天体の予想位置を追尾中心という。遅延追尾は、過去には VLA などの結合素子型干渉計では、伝送ケーブルの長さを調節することで行われてきたが、現在では計算機でデジタル的に補正する。遅延追尾を行った場合のパワースペクトルは

$$S(\nu) = F_\nu e^{2\pi i\nu(\tau_g - \tau_0)} \quad (21)$$

となる。すなわち、遅延追尾が完璧な場合、 $\tau_g = \tau_0$  より位相項は0となる。

## 6 UVW 座標

地球から追尾中心に向かう方向を  $W$  成分とし、それに直交する成分のうち東向きに  $U$ 、北向きに  $V$  をとるような直交3次元座標系を導入し、基線ベクトルを

$$\vec{B} = (U, V, W) \quad (22)$$

と表すとする。この座標系では、追尾中心にある天体の方向ベクトルは

$$\vec{s}_0 = (0, 0, 1) \quad (23)$$

である。また、追尾中心からわずかにずれた天体の方向ベクトルについては、赤道座標系上  $(\alpha, \delta)$  での位置オフセットを  $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta) = (x, y)$  とすると、

$$\vec{s} = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \quad (24)$$

と書ける。

このとき、追尾中心からずれたところに位置する点源のパワースペクトルの位相項  $\phi$  は、

$$\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{c}, \quad \tau_0 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_0}{c}$$

の関係より、

$$\phi = 2\pi\nu(\tau_g - \tau_0) \approx 2\pi\nu(Ux + Vy)/c \quad (25)$$

とかける。ここで  $x, y \ll 1$  より、 $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \approx 1$  とした。

さらに、波長  $\lambda = c/\nu$  で規格化した  $u \equiv U/\lambda$ ,  $v \equiv V/\lambda$  を用いると、

$$\phi = 2\pi(ux + vy), \quad (26)$$

と書くことができる。すなわち、位相項を天体位置オフセット量  $x, y$  と UV 座標  $u, v$  で表すことができる。 $U, V$  は、天体から地球上の観測局を見たときに、その視線に垂直な面に地球上の観測局位置を投影したものであり、地球回転とともに時々刻々変化してゆく。 $UV$  面上を地球回転に伴って基線ベクトルが動くことで生じる軌跡を UV Coverage という。