天体測定学 II 2008-5

1　アインシュタインの関係式

各放射により放射された光子が持つエネルギーは $h\nu = E_2 - E_1$ であり、単位立体角あたりに放出されるエネルギーは $(h\nu/4\pi)$ である。ここで、輻射輸送方程式を考えると、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}\left[R_2 + R_3 - R_1\right]\phi(\nu) \tag{1}$$

ここで、$\phi(\nu)$ は線幅を表す関数であり、$\int \phi(\nu)\, d\nu = 1$ で規格化されているとする。上の式はアインシュタイン係数を用いて

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}\left[A_{21}n_2 + B_{21}I_\nu n_2 - B_{12}I_\nu n_1\right]\phi(\nu)$$

より

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}\left[-(B_{12}n_1 - B_{21}n_2)I_\nu + A_{21}n_2\right]\phi(\nu) \tag{2}$$

一方、吸収係数および放射係数を用いて書いた輻射輸送方程式は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu. \tag{3}$$

上の２つの式を比較から、吸収係数 κ_ν および放射係数 j_ν について以下の関係を得る。

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}(B_{12}n_1 - B_{21}n_2)\phi(\nu) \tag{4}$$

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}A_{21}n_2\phi(\nu) \tag{5}$$

源泉関数は $S_\nu = j_\nu \kappa_n$ で定義されるので、

$$S_\nu = \frac{A_{21}n_2}{B_{12}n_1 - B_{21}n_2} \tag{6}$$

ここで局所熱平衡状態を仮定すると、２つの準位の密度 n_1, n_2 について

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp(-\frac{h\nu}{kT}) \tag{7}$$

の関係がある。ここで g_1, g_2 は統計的重み（エネルギー準位の縮退度）を表す。

$$S_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12}g_1/g_2\exp(h\nu/kT) - B_{21}} \tag{8}$$

を得る。すでに見たように局所熱平衡状態の場合 $S_\nu = B_\nu$ であり、黒体輻射の輝度 b_ν は

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \tag{9}$$

であるから、$S_\nu = B_\nu$ を満たすためには、以下の２つの関係が要求される。

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2}B_{21} \tag{10}$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \tag{11}$$

これらの２つの式はアインシュタインの関係式と呼ばれる。この式は熱平衡状態に基づいて導出したが、アインシュタインの会形式は温度T によらず、熱平衡状態でなくとも成り立つ一般的な式である。アインシュタインの関係式を用いると、A_{21}、B_{21}、B_{12} のうち１つが得られれば他の 2 つも決めることができる。

1.1 吸収係数と光学的厚み

吸収係数 κ_ν をアインシュタイン係数を用いて書き改めてみる。

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}(B_{12}n_1 - B_{21}n_2)\phi(\nu') \tag{12}$$

に、アインシュタインの関係式を代入して B_{12}, B_{21} を消去する。

$$\begin{aligned}\kappa_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi}(\frac{B_{12}}{B_{21}}n_1 - n_2)B_{21}\phi(\nu') \\ &= \frac{h\nu}{4\pi}(\frac{g_2}{g_1}n_1 - n_2)\frac{c^2}{2h\nu^3}A_{21}\phi(\nu') \\ &= \frac{c^2}{8\pi\nu^2}\frac{g_2}{g_1}n_1(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{n_2}{n_1})A_{21}\phi(\nu')\end{aligned}$$

よって、

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 g_2 n_1}{8\pi\nu^2 g_1}\left[1 - \exp(\frac{h\nu}{kT})\right]A_{21}\phi(\nu') \tag{13}$$

さらにレーリー・ジーンズ近似 ($h\nu << kT$) の場合、

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 h g_2 n_1}{8\pi\nu g_1 k}\frac{A_{21}}{T}\phi(\nu') \tag{14}$$

を得る。このとき光学的厚み τ_ν は

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu \, ds \tag{15}$$

より、

$$\tau_\nu = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k}\frac{A_{21}}{T}\phi(\nu')\int n_1 \, ds \equiv \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k}\frac{A_{21}}{T}\phi(\nu')N_1 \tag{16}$$

ここで

$$N_1 = \int n_1 \, ds \tag{17}$$

は原子の柱密度を表す。すなわち、光学的厚み τ_ν は視線方向に積分した柱密度に比例する。また、物質の温度 T に反比例している。従って、光学的厚みが得られ、さらに物質温度 T が判れば、物質の存在量を求めることが可能である。

1.2　光学的厚みが小さい場合

光学的厚みが小さい場合、輝度温度で表した輻射方程式は

$$T_b = T_b(0) + \tau_\nu T \tag{18}$$

である。ここで T は物質の温度を表している。これに式 (16) を代入し、背景放射に対する温度増分 $\Delta T_b \equiv T_b - T_b(0)$ を導入すると、

$$\Delta T_b = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} A_{21} N_1 \phi(\nu') \tag{19}$$

となり、T が消去されていることがわかる。従って、τ_ν が小さい場合、観測された輝度は物質の温度によらずに直接に柱密度に変換することが可能である。線幅を表す関数 $\phi\nu'$ を消去するために ν' で両辺を積分すると、

$$\int \Delta T_b \, d\nu' = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} A_{21} N_1 \tag{20}$$

である ($\int \phi(\nu') \, d\nu' = 1$)。さらに、ドップラーシフトの関係式

$$\frac{v}{c} = -\frac{\nu' - \nu}{\nu} \tag{21}$$

より、$d\nu' = -\nu/c \, dv$ であるから、

$$\frac{\nu}{c} \int \Delta T_b \, dv = \frac{c^2 h g_2}{8\pi\nu g_1 k} A_{21} N_1$$

これを N_1 について解くと

$$N_1 = \frac{8\pi\nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \int \Delta T_b \, dv \tag{22}$$

この式が、光学的厚みが小さいときに、観測された輝度分布を物質の柱密度 N_1 に変換する式である。

2　中性水素 21cm 線

電波天文学における輝線の中で、最も重要なものの一つが中性水素 (HI) の放射する 21cm である。水素原子は宇宙において最も基本的な原子であり、星の材料や核融合反応の燃料ともなる最重要原子である。中性水素は陽子と電子からなっており、両者のスピンの向きが平行か反平行かによって微細なエネルギー準位差が発生する（超微細構造）。この 2 準位間のエネルギー差は $\Delta E = 9.4 \times 10^{-25}$ J（$T = \Delta E/k$ =0.068 K）であり、このエネルギー準位間の遷位に伴って放射される電磁波は周波数 ν =1420.405 MHz の電波である。この電波の波長は $\lambda = 21.106$ cm であるので、このような中性水素の基底状態の超微細構造に伴う放射を中性水素 21cm 線（HI21cm 線）と呼ぶ。

この遷移でのアインシュタイン係数は

$$A_{21} = 2.85 \times 10^{-15} \ \ \mathrm{sec}^{-1}$$

であることが知られており、遷移確率は極めて小さい。実際、1個の水素原子で遷移がおこるのに掛かる時間は約1千100万年である。しかし宇宙には大量の水素が存在するので、その積分効果により、この電波を観測することができる。さらに輝線のドップラーシフトからガスの視線速度も計測できるので電波天文において非常に重要な観測対象である。

中性水素の超微細構造は、原子と分子のスピン（それぞれスピン 1/2）が平行な状態 $F = 1/2 + 1/2 = 1$ が上位、反平行な状態 $F = 1/2 - 1/2 = 0$ が下位にあたる。$F = 1$ の状態は3重縮退状態であるので $g_2 = 3$、$F = 0$ は縮退がなく $g_1 = 1$ である。熱平衡状態では

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

である。銀河系の星間空間における中性水素ガスの温度は $T \approx 200$ K であり、一方 $\Delta E/k = 0.068$ K より $h\nu << kT$ である（レーリー・ジーンズ近似）。このとき

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} = 3 \tag{23}$$

が成り立つから、平行・反平行状態の中性水素を合わせた全柱密度 N_{HI} は

$$N_{\mathrm{HI}} = N_2 + N_1 = 4N_1, \tag{24}$$

となる。この式からから、N_{HI} は

$$N_{\mathrm{HI}} = \frac{32\pi\nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \int \Delta T_b \, dv = \chi_{\mathrm{HI}} \int \Delta T_b \, dv \tag{25}$$

とかける。ここで χ_{HI} は観測される積分強度 $\int \Delta T_b \, dv$ を柱密度に換算する際の変換係数であり、

$$\chi_{\mathrm{HI}} \equiv \frac{32\pi\nu^2 g_1 k}{c^3 h g_2 A_{21}} \tag{26}$$

である。ここに、上で紹介した定数の具体的な値を代入すると、

$$\chi_{\mathrm{HI}} = 1.82 \times 10^{18} \ \ \mathrm{cm}^{-2}/(\mathrm{K\ km\,s}^{-1})$$

である。