

電波天文学特論 II 2008-4

6 電波干渉計の基礎

6.1 干渉計の基礎方程式と幾何学的遅延時間

干渉計の最も簡単な例として、2つの電波望遠鏡からなる2素子干渉計を考える。2つの観測局である電波天体を同時にしたとき、電波の伝播速度が有限(光速 c)であるために、同一波面の電波が観測局1と2に到達する時刻に差が生じる。この到達時間差を遅延時間という。遅延時間は、アンテナや受信機内部での機械的遅延および大気や電離層による伝播遅延がない理想的な状態では、天体の方向ベクトル \vec{s} と基線ベクトル \vec{B} の幾何学的な関係のみから決まり、これを特に幾何学的遅延時間 (τ_g) と呼ぶ。図1からわかるように幾何学的遅延時間は、

$$\tau_g = \frac{\vec{s} \cdot \vec{B}}{c}, \quad (1)$$

という簡単な関係式で表される。これが干渉計の基本方程式であり、遅延時間は干渉計の最も基本的な観測量である。

式(1)において基線ベクトル \vec{B} が既知の場合、任意の星について τ_g を計測してやると、その天体の方向ベクトル \vec{s} を決定することができる。もちろん、方向ベクトル \vec{s} はベクトル量であるので、1回の τ_g の計測のみから \vec{s} を一意に決定することはできない。しかし、基線ベクトル \vec{B} は地球回転とともに時々刻々変化するので、時間とともに遅延時間 τ_g がどのように変化するかを観測すれば、式(1)に従って天体位置 \vec{s} を決めることができる。また、同様に、天体位置 \vec{s} が既知の場合は、遅延時間 τ_g の観測から基線ベクトル \vec{B} を求めることができる。このように、天体位置を求める位置天文観測と、基線長を求める測地観測とは、いわば表裏一体の関係にあることがわかる。

6.2 相互相関関数

干渉計で遅延時間を計測するには、複数の局で受信した信号を局同士で掛け合わせ、相互相関を取る必要がある。この処理をするのが相関器であり、干渉計観測に不可欠な装置である。例として、図1のような2素子干渉計において観測された電波の相互相関を以下で考える。

簡単のため天体は点源であるとし、天体からの電波は周波数 ν_0 の単色平面波とする。この時、観測局1、2で受信される天体電波(電圧)はそれぞれ、

$$V_1(t) = V_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi), \quad (2)$$

$$V_2(t) = V_0 \cos(2\pi\nu_0(t - \tau_g) + \phi), \quad (3)$$

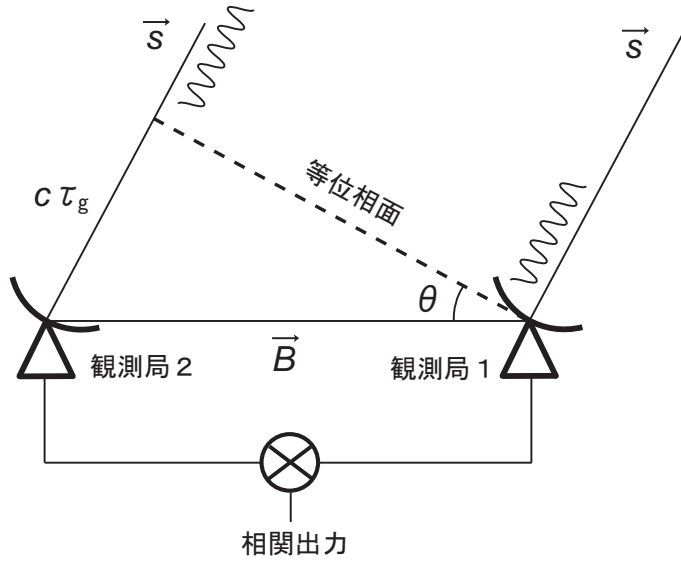


図 1: 2 素子干渉計における基線と幾何学的遅延時間の関係の模式図。

と書ける。ここで、 τ_g は幾何学的遅延時間である。このとき、相関器で得られる相互相関関数 $R_{12}(\tau)$ は次のように定義される。

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t)V_2(t - \tau)dt \quad (4)$$

相互相関関数は局 1 での受信電圧と局 2 での受信電圧を、時間を τ だけずらしながら掛け合わせることを意味している。

電磁気学等においては正弦波的な振動関数を複素数で扱い、必要に応じて実部を取るやり方を導入すると計算上便利なことがあり、相互相関関数においても同様である。今、各局で観測される電圧を複素数を用いて

$$V_1(t) = V_0 e^{i(2\pi\nu_0 t + \phi)}, \quad (5)$$

$$V_2(t) = V_0 e^{i(2\pi\nu_0(t - \tau_g) + \phi)}, \quad (6)$$

と表す(式 (2), (3) を実部とし、実部と 90 度位相のずれた虚部を導入ればよい)。複素の電圧を考えた場合、複素相互相関関数は以下のように定義できる。

$$C_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t)V_2^*(t - \tau)dt. \quad (7)$$

式 (5), (6), (7) より、

$$C_{12}(\tau) = V_0^2 e^{2\pi i\nu_0(\tau + \tau_g)}, \quad (8)$$

を得る。これより、相互相関関数 C_{12} のうち、振幅が天体強度の情報を、位相が遅延時間の情報を持っていることがわかる。このように複素数で記述された相互相関を複素相互相関関数と呼び、このような処理を行う相関器を複素相関器という。

6.3 パワースペクトル

相関関数をフーリエ変換したものをパワースペクトルという。パワースペクトルは、どの周波数でどの程度の電力を表すかを表す周波数領域の関数である。フーリエ変換および逆フーリエ変換は以下で定義される。

$$X(\nu) = \int x(t) e^{-2\pi i\nu t} dt, \quad (9)$$

$$x(t) = \int X(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu, \quad (10)$$

ちなみに、フーリエ変換は物理的に同じ現象を時間領域の関数から周波数領域への関数へ（あるいはその逆へ）変換することを意味しており、相関関数とパワースペクトルも、物理的に同じ現象を時間領域・周波数領域で表した対である（特に、相互相関関数のフーリエ変換の場合、クロスパワースペクトルとも呼ばれる）。

6.3.1 単色波の場合

単色波の場合、複素相関関数 $C_{12}(\tau)$ をフーリエ変換すると。

$$S(\nu) = \int C_{12}(\tau) e^{-2\pi i\nu\tau} d\tau = V_0^2 \delta(\nu - \nu_0) e^{2\pi i\nu_0\tau_g} \quad (11)$$

である。なお、ここで Dirac のデルタ関数 (Dirac's delta function) のフーリエ積分表示、

$$\delta(\nu) = \int e^{2\pi i\nu t} dt, \quad (12)$$

を用いた。式 (11) は、最初に仮定したとおり周波数 ν_0 の輝線スペクトルになっており、その振幅は電圧の 2 乗なので電力に比例する。従って、相関関数のフーリエ変換が確かにパワースペクトルになっていることがわかる。また、パワースペクトルの位相項は $\phi = 2\pi\nu_0\tau_g$ となっている。

6.3.2 連続波源の場合

上記の議論では周波数 ν_0 の単色波を考えたが、連続波スペクトルの場合、上の式を ν_0 について周波数方向に積分したものである。このときのパワースペクトルは

$$S(\nu) = F_\nu e^{2\pi i\nu\tau_g} \quad (13)$$

と表すことができる。ここで、 F_ν は周波数方向のフラックス分布を表す実関数である。また式 (13) より、パワースペクトルの位相 ϕ は周波数 ν の関数として、 $\phi = 2\pi\nu\tau_g$ となっている。

6.4 遅延追尾

相互相関を得るには式 (4) で時間積分をする間 τ_g が一定でなければならない。しかし、実際の干渉計では (特に基線長の大きい VLBI では) 地球回転の効果により τ_g は時々刻々変化する。地球回転の角速度 ω_{\oplus} は

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{86400 \text{ sec}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ radian/sec} \quad (14)$$

であり、基線長は例えば VERA の最長基線の $|\vec{B}| = 2300 \text{ km}$ とすると、基線長の変化率 $\dot{\vec{B}}$ は

$$\dot{\vec{B}} \approx |\vec{B}|\omega_{\oplus} = 167 \text{ m/sec} \quad (15)$$

となる。すなわち 1 秒間に幾何学的遅延時間は 100 m 以上変化する。一方、

$$\dot{\phi} = 2\pi\nu\tau_g = 2\pi \frac{\dot{\vec{B}} \cdot \vec{s}}{\lambda} \quad (16)$$

より、パワースペクトルの位相の変化率を回転数で表した値

$$\frac{\dot{\phi}}{2\pi} = \frac{\dot{\vec{B}} \cdot \vec{s}}{\lambda} \quad (17)$$

は、例えば VERA で 22GHz 帯の観測の場合 $\lambda = 1.3 \text{ cm}$ より、

$$\frac{\dot{\phi}}{2\pi} \approx \frac{|\dot{\vec{B}}|\omega_{\oplus}}{\lambda} = 1.2 \times 10^4 \text{ Hz} \quad (18)$$

となる。すなわち、今考えている例では相関関数を計算するために仮に 1 秒間積分したとすると、その間に τ_g の変化によって位相が 1 万 2000 回も余計に回転する。これでは正しく積分することが不可能であり (例えば、振幅 1 でぐるぐる回ると回転する複素ベクトルをそのまま時間平均すると 0 になる) このため相関関数を得るには位相回転を止めるために幾何学的遅延時間 τ_g を打ち消すような補正項 $-\tau_0$ を加える必要がある。これは、あらかじめ判っている天体の位置を基に幾何学的遅延時間を予想したものであり、この補正を遅延追尾といい、 τ_0 の計算に使われる天体の予想位置を追尾中心という。遅延追尾は、過去には VLA などの結合素子型干渉計では、伝送ケーブルの長さを調節することで行われてきたが、現在では計算機でデジタル的に補正する。遅延追尾を行った場合のパワースペクトルは

$$S(\nu) = F_{\nu} e^{2\pi i\nu(\tau_g - \tau_0)} \quad (19)$$

となる。すなわち、遅延追尾が完璧な場合、 $\tau_g = \tau_0$ より位相項は 0 となる。

6.5 UVW 座標

地球から追尾中心に向かう方向を W 成分とし、それに直交する成分のうち東向きに U 、北向きに V をとるような直交 3 次元座標系を導入し、基線ベ

クトルを

$$\vec{B} = (U, V, W) \quad (20)$$

と表すとする。この座標系では、追尾中心にある天体の方向ベクトルは

$$\vec{s}_0 = (0, 0, 1) \quad (21)$$

である。また、追尾中心からわずかにずれた天体の方向ベクトルについては、赤道座標系上 (α, δ) での位置オフセットを $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta) = (x, y)$ とすると、

$$\vec{s} = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \quad (22)$$

と書ける。

このとき、追尾中心からずれたところに位置する点源のパワースペクトルの位相項 ϕ は、

$$\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{c}, \quad \tau_0 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_0}{c}$$

の関係より、

$$\phi = 2\pi\nu(\tau_g - \tau_0) \approx 2\pi\nu(Ux + Vy)/c \quad (23)$$

とかける。ここで $x, y \ll 1$ より、 $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \approx 1$ とした。

さらに、波長 $\lambda = c/\nu$ で規格化した $u \equiv U/\lambda, v \equiv V/\lambda$ を用いると、

$$\phi = 2\pi(ux + vy), \quad (24)$$

と書くことができる。すなわち、位相項を天体位置オフセット量 x, y と UV 座標 u, v で表すことができる。 U, V は、天体から地球上の観測局を見たときに、その視線に垂直な面に地球上の観測局位置を投影したものであり、地球回転とともに時々刻々変化してゆく。 UV 面上を地球回転に伴って基線ベクトルが動くことで生じる軌跡を UV Coverage という。

上で得られた位相を用いてパワースペクトルを改めて書き表すと

$$S_\nu(u, v) = F_\nu e^{2\pi i(ux + vy)} \quad (25)$$

となる。このようにパワースペクトルを (u, v) の関数として表したものを特にビジビリティ (visibility) と呼ぶ。

6.6 像合成

前回までの議論では、天体が点源であることを仮定していたが、以下では天体が点源でなく構造を持っている状況を考える。

まず、天体の構造を点源の重ね合わせで表すとする。フラックスが F_i の点源が位置 (x_i, y_i) にあるとき、観測されるパワースペクトルはそれらの重ね合わせにより、

$$S(\nu) = \sum_i F_i e^{2\pi i(ux_i + vy_i)} \quad (26)$$

とかける。

あるいは、よりスムーズな輝度分布 $I_\nu(x, y)$ を考えると、フラックスと輝度の関係 $F(x, y) = I_\nu(x, y)dxdy$ を式 (26) に用いてパワースペクトルは

$$S(\nu) = \sum_i I_\nu(x_i, y_i) e^{2\pi i(ux_i + vy_i)} dx_i dy_i$$

より、総和を積分と置き換えて

$$S(\nu) = \iint I_\nu(x, y) e^{2\pi i(ux + vy)} dxdy \quad (27)$$

と書ける。すなわち、パワースペクトル/ビジビリティは輝度分布 $I_\nu(x, y)$ の2次元フーリエ変換 ($x \rightarrow u, y \rightarrow v$) になっている。つまり、干渉計観測によって得られるビジビリティを以下のように逆フーリエ変換することで、天体の輝度分布を得ることができるのである。これが干渉計による像合成の基本原理である。すなわち、

$$I_\nu(x, y) = \iint S_\nu(u, v) e^{-2\pi i(ux + vy)} dudv \quad (28)$$

である。

以下に、相互相関関数、パワースペクトル/ビジビリティ、輝度分布の、フーリエ変換を通じた関係をまとめる。

$$C(\tau) \leftrightarrow S(\nu) = S_\nu(u, v) \leftrightarrow I_\nu(x, y) \\ (\tau \leftrightarrow \nu, (u, v) \leftrightarrow (x, y))$$